SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI ANALISI MATEMATICA

P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI

UN CRITERIO DI WIENER PER UNA CLASSE DI OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

Bologna, 7 MARZO 1985

In questo seminario esporremo alcuni risultati riguardo ad una classe di operatori differenziali ellittici degeneri del 2° ordine, a proposito delle seguenti questioni (L indica un operatore della classe considerata):

1) Stima della funzione di Green in termini della distanza d associata all'operatore L
2) Caratterizzazione dei punti di frontiera regolari per il problema di Dirichlet relativo all'operatore L, mediante una condizione del tipo di quella di Wiener per il laplaciano.
3) Criteri geometrici di regolarità.

Sia Ω_0 un aperto connesso di R^n, con $n \geq 3$. Siano, per $1 \leq i \leq y, X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j}$ operatori differenziali del 1° ordine a coefficienti $C^\infty(\Omega_0, R)$.

Indicate con b_i $(1 \leq i \leq y)$ altre funzioni in $C^\infty(\Omega_0, R)$, sia:

$$L = \sum_{i=1}^{r} X_i^2 + \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\, X_i$$

Sull'operatore L facciamo le seguenti ipotesi:

i) L'algebra di Lie generata da $X_1, \dots X_r$ ha rango n in ogni punti di Ω_0.

ii) Esistono due funzioni strettamente positive θ, θ^* di classe $C^2(\Omega_0, R)$ tali che $L\theta < 0$, $L^*\theta^* < 0$ in Ω_0; L^* denota l'operatore aggiunto formale di L.

Queste ipotesi garantiscono (cfr. [B]) che ogni aperto $\omega \subset\subset \Omega_0$ dotato, in ciascun punto di frontiera di una normale esterna non caratte-

ristica per L, possiede una *funzione di Green* g, mediante la quale si può rappresentare la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet.

$$\begin{cases} Lu = -\mu \quad \text{in } \omega \qquad [\mu = \text{misura con supporto} \subseteq \omega] \\ u/\partial\omega = 0 \end{cases}$$

nella forma:

$$u(x) = \int_\omega g(x,y)\, d\mu(y) \qquad \forall x \in \omega.$$

La funzione di Green consente inoltre di rappresentare in ω le funzioni L-superarmoniche, ed i potenziali; in particolare: se $u \in S(\omega) \cap H(\omega-K)$ [L-superarmonica in ω, e armonica in ω-K] con $K \subset\subset \omega$, esistono e sono uniche $h \in H(\omega)$ e $\mu \in M^+(K)$ (misura non negativa con supporto in K) tali che:

$$(1) \qquad u(x) = h(x) + \int_\omega g(x,y)\, d\mu(y) \quad \forall x \in \omega$$

Se $u \in \mathscr{P}(\omega)$ [u è un L-potenziale su ω] allora la (1) vale con $h \equiv 0$ (cfr [N,S]).

Se F è un compatto $\subseteq \omega$, poniamo

$$C(F) \text{ [capacità di F] } \overset{\text{det}}{=}$$

$$= \sup \{\mu(F)/\mu \in M^+(F), \int_F g(x,y)d\mu(g) \leq 1 \quad \forall x \in \omega\}$$

Si dimostra (cfr [L], [N,S]) che esiste $\mu_F \in M^+(F)$ tale che $\mu_F(F) = C(F)$; μ_F si chiama *misura di equilibrio* di F, e la funzione

$$V(x) = \int_\omega g(x,y)\, d\mu_F(y) \qquad \forall x \in \omega$$

si chiama *potenziale di equilibrio* di F in ω. Risulta $V(x) = 1$ in int F, si ha inoltre che la misura μ_F ha il supporto contenuto in ∂F (quindi $C(F) = C(\partial F)$). Il potenziale di equilibrio di un compatto F sarà indicato anche con $\hat{R}_1^F$.

Diamo ora la definizione della distanza d associata all'operatore L. Questa distanza è stata introdotta da Fefferman-Phong [F,P], Nagel-Stein-Wainger [N,S,W] per operatori con coefficienti C^∞, da Franchi-Lanconelli [F,L,1] per certi operatori con coefficienti non regolari. Facendo uso della distanza d, stabiliremo alcuni criteri di regolarità per il problema di Dirichlet relativo all'operatore L.

Una curva $\gamma \subseteq \Omega_0$ si dice X-ammissibile se:

i) γ è C^1 a tratti

ii) Ciascuno dei tratti C^1 di γ è una curva integrale di uno dei campi $\pm X_1, \ldots, \pm X_r$.

Se $\gamma\ [0,T] \to \Omega_0$ è una parametrizzazione di γ soddisfacente i), ii), porremo $l(\gamma) = T$.

L'ipotesi sul rango di $L(X_1, \ldots X_\nu)$ permette di dimostrare che per ogni x, $y \in \Omega_0$ esiste una curva γ X-ammissibile che congiunge x con y; si può perciò definire:

$$d(x,y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ è X-ammissibile e congiunge x con y}\}.$$

Questa d è una distanza, essa risulta equivalente a quella definita in [N,S,W] (cfr. [F]). Si può dimostrare inoltre che, se l'operatore L è ellittico, e A è la matrice della sua parte principale, allora la distanza d è equivalente alla distanza riemanniana generata dalla forma bilineare

$$g(x,\xi,\eta) = \langle A^{-1}(x)\xi,\eta \rangle ,$$

in particolare, se $L = \Delta$ (operatore di Laplace), d è equivalente alla di_ stanza euclidea.

Nel seguito faremo frequente uso delle seguenti proprietà del_ la distanza d:

i) esiste $c > 0$ tale che $d(x,y) \geq c \|x-y\|$ per ogni $x, y \in \Omega_0$

ii) (proprietà di duplicazione): esiste $C_1 > 0$ tale che, per ogni $x \in \Omega_0$, $r > 0$ risulta:

$$\mu(s(x,2r)) \leq C_1 \, \mu(s(x,r))$$

(μ denota la misura di Lebesgue , $s(x,2r)$ e $s(x,r)$ le sfere, nella distanza d, di centro x e raggio rispettivamente $2r$ e r)

iii) la topologia generata in Ω_0 da d coincide con quella indotta in Ω_0 dalla topologia euclidea di R^n.

Facendo uso della distanza d è stata stabilita, da Sanchéz-Calle [S] e Nagel-Steim-Wainger [N,S,W] una stima esplicita per la funzione di Green per l'operatore L:

Teorema 1. Sia $\omega \subseteq \Omega_0$ un aperto dotato difunzione di Green g, per l'operatore L. Allora esistono due costanti $c > 0$ e $C > 0$ tali che: per ogni (x,y) di un intorno della diagonale di $\omega \times \omega$ risulta:

$$c \frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))} \leq g(x,y) \leq C \frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))} \tag{2}$$

Più brevemente, esprimeremo la (2) scrivendo:

$$g(x,y) \cong \frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))}$$

Osservazione 1. Se $L = \Delta$ (e allora d è equivalente alla distanza euclidea), l'espressione $\frac{d^2(x,y)}{\mu(s(x,d(x,y)))}$ equivale a $\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}$, che corrisponde alla soluzione fondamentale.

Osservazione 2. Per ogni fissato $y \in \omega$, risulta $\lim_{x\to y} g(x,y) = +\infty$. Infatti, essendo $d(x,y) \geq c\,\|x-y\|$, risulta $s(x,r) \subseteq B(x, \frac{r}{c})$ (B = boccia euclidea), quindi $\mu(s(x,r)) \leq \mu(B(x,\frac{r}{c})) \cong r^n$, e pertanto

$$\frac{d^2(x,y)}{\mu\,(s(x,d(x,y)))} \geq \text{cost.}\ \frac{1}{d(x,y)}$$ da cui segue quanto affermato.

La funzione $x \to g(x,y)$ è dunque una funzione superarmonica positiva, che vale $+\infty$ in y, dunque l'insieme $\{y\}$ è *polare* (cfr. [C,C], proposizione 6.2.1).

Osservazione 3. La formula (2) permette di ottenere una stima esplicita per la capacità di una qualunque sfera nella distanza d, risulta:

$$C(s(x,r)) \cong \frac{\mu(s(x,r))}{r^2} \tag{3}$$

Infatti, indicati con V_s e μ_s rispettivamente il potenziale e la misura di equilibrio di $s = s(x,r)$, e tenendo conto del fatto che x è punto interno di s, per la proprietà di d di generare la stessa topologia della distanza euclidea, si ha:

$$1 = V_S(x) = \int_{\partial S} g(x,y)d\mu_S(y) \stackrel{\sim}{=} \int_{\partial S} \frac{r^2}{\mu(s)} d\mu_S(y) = \frac{r^2}{\mu(s)} \mu_S(\partial S) = \frac{r^2}{\mu(s)} C(\delta)$$

da cui segue la (3), della quale faremo uso nel seguito.

Possiamo ora enunciare il criterio di Wiener:

<u>Teorema 2.</u> Sia Ω un aperto $\subseteq \Omega_o$; sia $y \in \partial\Omega$; poniamo, per ogni $K \in N_o$

$$\Omega'_K = \{x \in \Omega' | \lambda^{k+1} \leqq d(x,y) \leqq \lambda^k\} ,$$

essendo λ un fissato numero reale $\in]0,1[$.

Sia V_k il potenziale di equilibrio di Ω'_K, relativamente a un intorno ω di y dotato di funzione di Green.

Sono equivalenti le affermazioni:

a) y è L-regolare per *L*

b) $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(y) = +\infty$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2K} C(\Omega'_k)}{\mu(s(y,\lambda^k))} = +\infty$

L'equivalenza tra b) e c) è una semplice conseguenza delle sti̲me date per la funzione di Green, ci limiteremo pertanto ad indicare la tecnica di dimostrazione di a) $\Leftrightarrow$ b).

Per l'osservazione 2, l'insieme {y} è polare; la regolarità di y per Ω è dunque caratterizzata dal criterio tipo De la Vallee-Poussin, contenuto in [N,S].

(4) $\qquad$ y è irregolare per $\Omega \Leftrightarrow \lim_{U \in Uy} \hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) = 0$

($\mathcal{U}_y$ è il filtro degli intorni compatti di y).

La dimostrazione di a) $\Longrightarrow$ b) è molto semplice: supponiamo: $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(y) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $p \in N$ tale che $\sum_{k=p}^{\infty} v_k(y) < \varepsilon$. Se U è un intorno compatto di y tale che $\Omega' \cap U \subseteq \bigcup_{k=p}^{\infty} \Omega'_k$, allora (cfr. [C,C], prop. 4.22 e teor. 4.2.2), risulta

$$\hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) \leq \hat{R}_1^{\bigcup_{k=p}^{\infty} \Omega'_k}(y) \leq \sum_{k=p}^{\infty} v_k(y) < \varepsilon$$

dunque, in base a (4), y è irregolare per Ω.

Per dimostrare b) $\Longrightarrow$ a), supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(y) = +\infty$

In tal caso, almeno una delle due serie $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}(y)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1}(y)$ diverge, supponiamo sia la prima.

Chiamiamo $F_{p,q} = \bigcup_{i=p}^{q} \Omega'_{2i}$, $v_{p,q}$ il potenziale di equilibrio di $F_{p,q}$.

La parte più rilevante della dimostrazione è dedicata a far vedere che:

(5) Esiste un numero reale $A > 0$ tale che: per ogni $p \in N$, e per ogni $q > p$, q sufficientemente grande, risulta: $v_{p,q}(y) > A$

Una volta provato (5), basta osservare che: se U è un intorno compatto di y, per p abbastanza grande, e per ogni $q > p$ risulta $F_{p,q} \subseteq U$; quindi

$$\hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) \geq v_{p,q}(y) > A,$$

non accade quindi che $\lim\limits_{U \in \mathcal{U}_y} \hat{R}_1^{\Omega' \cap U}(y) = 0$, e quindi a causa di (4), y è regolare.

Per provare (5), consideriamo le funzioni

$$w_{p,q}(z) = \sum_{i=p}^{p} V_{2i}(z)$$

Sia $z \in F_{p,q}$, per un K tra p e q, risulta $z \in \Omega'_{2k}$, quindi

$$w_{p,q}(z) \leqq 1 + \sum_{\substack{i=p \\ i \neq k}}^{q} V_{2i}(z)$$

Ora, per $i \neq k$, abbiamo:

$$V_{2i}(z) = \int_{\Omega'_{2i}} g(z,\xi)\, d\mu_{2i}(\xi) =$$

(μ_{2i} indica la misura di equilibrio di Ω'_{2i})

$$= \int_{\Omega'_{2i}} \frac{g(z,\xi)}{g(y,\xi)}\, g(y,\xi) \leqq$$

$$\leqq \sup_{\substack{z \in \Omega'_{2k} \\ \xi \in \Omega'_{2i}}} \frac{g(z,\xi)}{g(y,\xi)}\, V_{2i}(y)$$

E' proprio per stimare questo estremo superiore, che risulta opportuna la decomposizione della serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} V_k(y)$ in $\sum\limits_{k=0}^{\infty} V_{2k}(y) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} V_{2k+1}(y)$, in questo modo, prendendo $z \in \Omega'_{2k}$, $\xi \in \Omega'_{2i}$, con $i \neq k$, la coppia (z,ξ)

si mantiene lontana dalla diagonale di $\omega \times \omega$.

Sfruttando la stima della funzione di Green data nel teorema 1, si riesce a dimostrare che:

esiste una costante $C_0 > 0$ (dipendente solo da λ) tale che per ogni p, $q \in N$ $(p < q)$, e per ogni $z \in F_{p,q}$, risulta

$$w_{p,q}(z) \leq 1 + C_0 \sum_{i=p}^{q} V_{2i}(y) = 1 + C_0\, w_{p,q}(y)$$

Con alcune considerazioni, basate essenzialmente sull'applicazione del principio di minimo, si dimostra poi che:

$$w_{p,q}(z) \leq (2+C_0\, w_{p,q}(y))\, v_{p,q}(z)) \quad \text{per ogni } z \in \omega ,$$

da cui, per $z = y$, si ottiene

$$v_{p,q}(y) \geq \frac{w_{p,q}(y)}{2 + C_0\, w_{p,q}(y)}$$

Fissato p, il 2° membro ha limite $1/C_0$ per $q \to +\infty$ a causa della divergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} V_{2k}(y)$, perciò, per q abbastanza grande, risulterà $v_{p,q}(y) > \frac{1}{2C_0}$; e così provata la (5), e con essa il Teorema 2.

Come applicazione dei teoremi 1 e 2 si ottengono alcuni criteri geometrici di regolarità.

<u>Teorema 3.</u> Supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che: per ogni $r > 0$, abbastanza piccolo, risulti:

$$\mu(\Omega' \cap S(y,r)) \geq C\, \mu(s(y,r)).$$

Allora y è regolare per Ω.

La dimostrazione è basata sul confronto di $u_r(x) = \hat{R}_1^{\Omega' \cap s(y,r)}(x)$ con la funzione $v_r(x) = \int_{\Omega' \cap s(y,r)} g(x,z) \frac{dz}{r^2}$

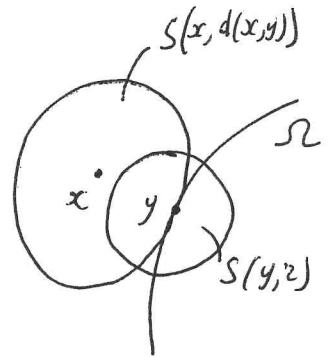
Sfruttando il Teorema 1, si dimostra che $v_r(y) \geq$ cost. (indipendentemente da r), si prova poi, applicando il principio di minimo, che $v_r(x) \leq$ cost. $u_r(x)$ per ogni x, complessivamente risulta $u_r(y) \geq$ cost: il Teorema 3 segue ora dalla (4) (criterio tipo De la Vallee-Poussin).

Osservazione. Quando $L = \Delta$ l'ipotesi del teorema 3 è soddisfatta, per esempio, quando esiste un cono con vertice in y contenuto in Ω' (proprietà di cono).

Teorema 4. (proprietà della sfera esterna).

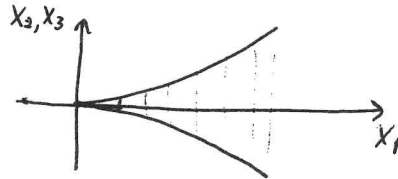
Supponiamo che esista $x \in \Omega'$, tale che $s(x,d(x,y)) \subseteq \Omega$.

Allora y è regolare per Ω.

Questo teorema si dimostra sfruttando certe proprietà geometriche della distanza d la misura di $s(x,d(x,y)) \cap s(y,r)$ è equivalente alla misura di $s(y,r)$, se r è abbastanza piccolo ([F,L,2], Proposizione 2.10); pertanto il teorema 4 segue come corollario del teorema 3.

Esempio. Applichiamo il teorema 2 (criterio di Wiemer) ad un caso concreto. Sia

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$$

Studiamo la regolarità di $0 = (0,0,0)$ rispetto a L, per determinati aperti $\Omega \subseteq R^3$.

1) Sia Ω tale che in un intorno di 0, Ω' sia descritto da
$\{(x_1 x_2, x_3) \in R^3 | \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq \phi(x_1)\}$
con ϕ funzione continua e crescente, tale che $\phi(0) = 0$. Tenendo presente che, in questo caso, $s(0,r)$ equivale a un parallelepippedo di semiassi r, r^{m+1}, r^{m+1}, rispettivamente nelle direzioni di x_1, x_2, x_3, si dà una espressione esplicita di $C(\Omega'_k)$ in termini della capacità elettrostatica di un opportuno ellissoide, i cui semiassi hanno lunghezza che tengono conto delle dimensioni di Ω'_k e della degenerazione di L. Tale capacità elettrostatica si calcola esplicitamente (cfr. [K].)

Si ottiene che la serie definita in C, teorema 2 ha lo stesso carattere di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{mk} |\lg \phi(\lambda^k)|}$, quindi, per esempio, 0 è regolare per Ω se $C(\xi) \geq A e^{C\xi^{-2m} \lg \xi}$.

Osserviamo che, se $m > 0$, una "spina" di tipo esponenziale è regolare per L.

2) Sia ora Ω tale che un intorno di 0, Ω' sia descritta da $\{x_1, x_2, x_3) \in R^3 | |x_1| \leq x_2; |x_3| \leq x_2^{m+1}\}$.

Una maggiorazione piuttosto rozza di $C(\Omega'k)$ è sufficiente per verificare che la serie e di teorema 2 è convergente: dunque 0 è irregolare per Ω.

Quest'ultimo esempio mette in evidenza il fatto che lungo la direzione di x_1, l'operatore L ha un comportamento "migliore" rispetto al laplaciano, per quanto concerne la regolarità dei punti viceversa, nella direzione di x_2(o x_3), la situazione rispetto al laplaciano è molto meno favorevole.

BIBLIOGRAFIA

[B] J.M. BONY: "Principe du maximum, inegalité de Harnack et unicité du problema de Cauchy pour les operateurs elliptiques dégénérés". Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19, 1 (1969), 277-304.

[CC] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA: "Potential theory on Harmonic Spaces". Springer-Verlag, Berlin 1972.

[F] B. FRANCHI: "Stime sub-ellittiche e metriche riemmaniane singolari". Sem. Univ. Bologna, 1982-'83, parte II.

[F,L,1] B. FRANCHI, E.LANCONELLI: "Una metrique associee a una classe d'operateurs elliptiques dégénérés". Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, 105-114 (1982).

[F,L,2] B. FRANCHI, E. LANCONELLI: "Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficient. Ann. S.N.S. Pisa.

[F,P] C. FEFFERMAN, D.M. PHONG: "Subelliptic eigenvalue problems". Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, vol. 2, pp. 590-606, Wadsworth, 1983.

[K] O.D. KELLOGG: "Fundations of potential theory". Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[L] E. LANCONELLI: "Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore. Ann. Mat. Pura ed Appl. 97 (1973), 83-114.

[N,S] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI: "Superharmonic functions and regularity, of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operator. B.U.M.I. Anal. Fun. e Appl. Serie VI, vol. III, C, N1 1984.

[N,S,W,] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER: "Balls and metrics defined by vector fields-basic properties". Acta Math. in press (1984).

[S] A. SANCHEZ-CALLE: "Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields". Invent. Math. 78, 143-160 (1984).